MINISTERE DE L'URBANISME
DU LOGEMENT ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1985

EPREUVE PRATIQUE DE MATHEMATIQUES

(temps accordé : 2 heures)

On considère le polynôme P tel que :

$$P(z) = z^3 + az^2 - \bar{a}z - 1$$

où a est un nombre complexe, $\bar{a}$ le nombre conjugué.

1.- On pose $a = \alpha + i\beta$ ($i^2 = -1$). Discuter, suivant la position, dans le plan de Cauchy ($O\alpha$, $O\beta$), du point A d'affixe a, le nombre de racines réelles de l'équation $P(z) = 0$ et donner leurs valeurs.

Prouver que cette équation a toujours au moins une racine de module 1, et que le module de toute racine est strictement inférieur à $1 + |a|$, du moins si a n'est pas nul ($|a|$ désigne le module du nombre complexe a).

2.- Dans la suite, on prend $a = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$.

a)- Calculer $a^2, a^3, a^4, \bar{a}, \bar{a}^2, \bar{a}^3, \bar{a}^4$, ($\bar{a}^2$ signifie le carré de $\bar{a}$) et les exprimer sous la forme $p + qa$, $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

b)- Diviser $P(z^2)$ par $P(z)$ (division euclidienne). En déduire que si λ complexe est racine de $P(z)$, $\mu = \lambda^2$ et $\nu = \lambda^4$ le sont aussi. En déduire enfin les valeurs de λ, μ, ν.

c)- Déterminer les restes des divisions euclidiennes par $P(z)$ de $z, z^2, z^4, z^8, \ldots\ldots, z^{(2^n)}$ et prouver que la suite des restes est périodique.

3.- Chercher tous les polynômes Q du 3° degré à coefficients réels ou complexes tels que $Q(z^2)$ soit divisible par $Q(z)$.